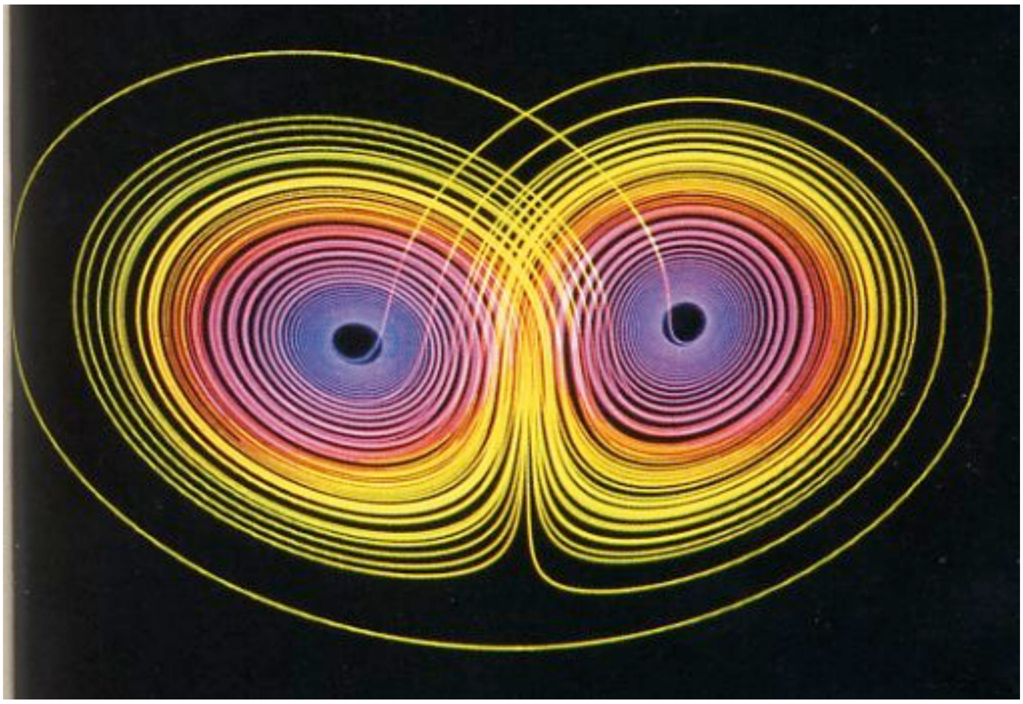
La dimension fractale de la pensée

Dr Désiré Ohlmann

Pour comprendre les mécanismes de la pensée , référons nous à la physique do chaos mis en évidence par le mathématicien Poincaré .
La notion » d'attracteurs étranges » est importante à définir car elle intervient sans cesse dans les mécanismes du Chaos
Comme dans le cas des planètes, le chaos ne signifie pas désordre total .
Le chaos est déterministe et le désordre est bridé (Trinh Xuan Thuan).
Dans l'espace abstrait des phases, les points d'intersection des orbites des planètes avec le plan vertical de Poincaré dessinent des formes bien définies. Au contraire de figures informes ou indistinctes, les dessins tracés sont extrêmement esthétiques et ravissent les yeux. Les points ne s'éparpillent pas au petit bonheur, mais sont « attirés » vers des courbes à la forme étrange et fantastiques , auxquelles les physiciens ont donné le nom d' « attracteurs étranges ».

Etrange, car ces jolies dessins sont la résultante de deux tendances antagonistes .

- D'une part un tendance convergente , puisque toutes les orbites sont attirées irrésistiblement vers ces dessins comme un clou par un aimant,
- D'autre part une tendance divergente, puisque des orbites initialement très proches l'une de l'autre divergent exponentiellement au bout d'un certain temps.
- Etranges, aussi, car ces dessins sont toujours semblables à eux même, quelle que soit l'échelle à laquelle vous les examinerez.

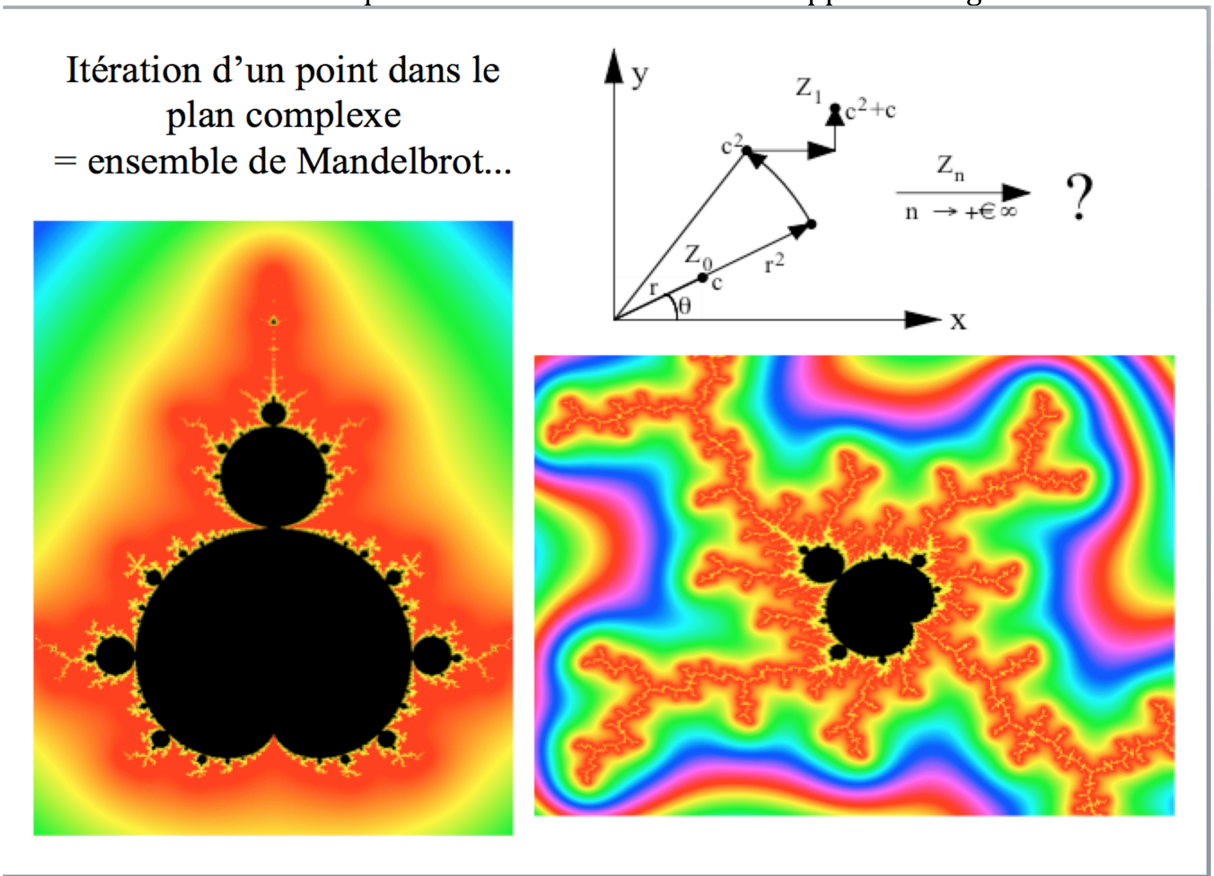


Attracteur étrange de Lorentz : En étudiant les mouvements de convection de l'air dans l'espace des phases (mouvements dûs au refroidissement de l'atmosphère en altitude . L'air chaud monte et se refroidit , puis il descend , en descendant il se réchauffe, cequi le fait monter à nouveau. Le météorologue Edward Lorentz découvrit que le point représentant le système météorologique traçait dans le plan de Poincaré une figure belle

et étrange en forme d'ailes de papillon. Le point ne répétait jamais son mouvement mais traçait inlassablement des boucles en forme d'ailes de papillon. Il était irrésistiblement attiré vers ces boucles, d'ou le nom « d'attracteur étrange » donné au dessin dans le plan de Poincaré. Par exemple, le point pouvait tracer une boucle dans l'aile gauche, puis deux boucles dans l'aile droite , avant de revenir sur celle de gauche. Le mouvement du point était chaotique car on ne pouvait pas prédire où il allait se trouver dans une boucle et sur laquelle des boucles à l'instant suivant .
On peut très bien observer les mouvements chaotiques dans les volutes de la fumée d'une cigarette ou celle d'une flamme dans un feu de cheminée si captivant pour nos sens .

Admirez les lignes délicates d'un attracteur étrange sur une feuille de papier ; prenez une loupe et grossissez une partie de cet attracteur étrange : vous y retrouverez les même dessins mais en plus petit. Grossissez de nouveau une partie de ces dessins à petite échelle, et vous reconnaîtrez de nouveau les mêmes tracés . Les mêmes motifs se répètent à l'infini quel que soit l'effet grossissant de votre loupe.
Hénon a ainsi découvert l'attracteur étrange des orbites stellaires qui a la forme d'une banane

...Voici l'illustration de ce que Mandelbrot mathématicien appela une figure fractale .



Les attracteurs étranges ne se comportent pas toujours comme les orbites stellaires .
Edward Lorentz qui a débusqué le chaos dans la météorologie, y a aussi découvert un attracteur étrange (ci dessus) . Dans l'espace abstrait des phases, les mouvements compliqués des masses d'air qui nous amènent la pluie ou le beau temps peuvent être

représentés par un point qui danse et virevolte tout en traçant de jolis dessins. Lorenz a montré que les points tombaient toujours dans un attracteur étrange en forme de paire d'ailes de papillon, contenant des boucles et des spirales serrées à l'infini, mais qui ne se répètent jamais . A nouveau on voit une indéterminable série de poupées russes. Une loupe révèle qu'une courbe se divise en 2, 4 , 8, etc. , jusqu'à l'infini .
Cette division sans fin soulève une question : comment un espace fini peut-il contenir l'infini ? La réponse est des plus étonnante : c'est possible parce que l'attracteur étrange a une dimension fractale …

La côte bretonne : un objet fractal.

Les choses familières peuvent être exprimées par un nombre entier de dimensions .
La ligne droite dimension 1 une surface plane a deux dimensions 2 , dans l'espace nous évoluons en trois dimensions 3 . Depuis les années 70 nous savons qu'il existe une catégorie d'objets dont le nombre de dimensions ne peut être exprimé que sous la forme de fraction (9/5 ou 5/2). Ces objets dont le nombre de dimensions est fractionnel ont été qualifiés de « fractals » par le mathématicien franco-américain Benoit Mandelbrot.
Les objets aux dimensions fractionnaires sont des objets familiers très répandus que nos côtoyons dan la vie courante. La plupart éveillent en nous un sentiment d'indicible beauté : un flocon de neige sur la vitre d'une fenêtre en hiver, un nuage à la forme délicate qui flotte dans le ciel azuré, ou encore une feuille toute en finesse sur un arbre.
Pour repérer ces objets aux dimensions non entières , ce sont ceux qui ont des formes irrégulières non répertoriées par la géométrie euclidienne (le monde physique à 3 dimensions) . qui de plus est, l'irrégularité qui les caractérise se répète à toutes les échelles .

Prenons la côte bretonne , si vous la contemplez depuis un avion volant à quelques kilomètres du sol, vous devinez sa forme irrégulière générale au dessus du sol, ainsi que sa forme irrégulière générale, mais vous ne verrez pas les détails comme les jolies plages ou les baies à l'eau limpide. En revanche , si vous suivez en voiture la route qui longe la côte bretonne soit à une distance de quelques mètres vous pouvez admirer ces plages et ces baies ; mais leurs menus détails, comme les zigzags, les échancrures minimes dans la côte vous échapperont encore. Ces détails vous pouvez les percevoir si vous longez la côte à pied. Cependant vous ne distinguerez pas les très menus détails , comme les grains de sable et les minuscules fragments de coquilles ou de galets. Imaginez vous maintenant en fourmi parcourant la côte millimètre après millimètre ! Vous découvrirez les accidents de terrain les plus infimes et jusqu'au moindre grain de sable .
Les irrégularités se manifestent ainsi à chaque échelle, et les motifs se répètent 'une échelle à l'autre (on appelle cela aussi l'invariance d'échelle) . Les baies , criques et plages révèlent des sous-baies des sous-criques des sous-plages , des sous-sous - criques… cette répétition se poursuit jusqu'à l'échelle des atomes à savoir au centième de millionième de centimètre.
On peut se demandes quelle est la longueur de la côte bretonne ? On n'obtient pas une réponse unique, car celle-ci dépend de la distance à laquelle l'arpenteur mesure cette longueur. D'avions beaucoup de coins et de recoins de taille inférieure au km seront négligés . La réponse sera de loin inférieure à la longueur réelle de la côte. De la route on verra mieux les contours sinueux la longueur sera plus grande mais sera toujours inférieure à la vraie longueur . Si vous faites le parcours à pied avec un décamètre la réponse sera encore plus grande car davantage de détails seront pris en compte, mais

sera toujours inférieure à la vraie longueur. Les coins inférieur à un mètre ne sont pas pris en compte et ainsi de suite. La fourmi qui aura tenu compte du moindre grain de sable mesurera une longueur plus grande que nous avec notre décamètre… **La réponse dépend donc des rapports entre l'objet mesuré et l'observateur.**
Elle est plus ou moins grande selon que ce dernier examine l'objet de « près ou de loin ». Cette interaction entre objet observé et observateur fait écho à ce qu'il en est dans le monde des atomes où l'acte d'observer perturbe les propriétés de l'atome observé ; n'observe-t-on pas les mêmes constatation dans l'approche quantique !
On pourrait penser que les estimations sans cesse croissantes de la longueur de la côte bretonne devront bien converger vers une valeur finale correspondant à la vraie longueur. On aurait raison si la côte bretonne était décrite par une figure géométrique euclidienne, par exemple le cercle, la méthode par sommation de segments de plus en plus courts converge bien vers le vrai périmètre du cercle sans jamais l'atteindre .

En référent aux solides de Platon , le cercle est d'abord représenté de façon approximative par un triangle inscrit dans le cercle, puis par un carré, par un pentagone, un hexagone .. et autres polygones . Le périmètre de ces figures géométriques inscrites dans le cercle approchera de plus en plus celui du cercle ! Mandelbrot a découvert que plus l'échelle de mesure diminue, plus la longueur mesurée pour la côte croît jusqu'à devenir infinie, ce qui peut perturber notre bon sens !

La géométrie Euclidienne perd pied dès qu'il s'agit de décrire un objet aussi irrégulier que la côte bretonne , ou plus généralement tout ce qui est tordu, disloqué, discontinu ou complexe. Elle ne peut rendre compte du non lisse , du non-arrondi, de l'entrelacé et de l'enchevêtré. Elle échoue quand elle a affaire à du non régulier.
Or c'est l'irrégularité qui caractérise la grande majorité des choses de la vie ! Mandelbrot se plait à le dire, « Les nuages ne sont pas des sphères , les montagnes ne sont pas des cônes , les côtes maritimes ne sont pas des cercles ;, et le éclairs ne sont pas des lignes droites « . Les formes de la géométrie euclidienne classique (sphère, cercle, cône) représentent une forte abstraction de la réalité . Cette géométrie a été très utile et a influencé notre pensée et notre vue du monde pendant plus de deux millénaires . Nos écoliers l'apprennent encore aujourd'hui. Elle a inspiré Platon , pour qui le monde réel n'était qu'un reflet imparfait (lumière agitée) du monde parfait (lumière réelle) aux formes euclidiennes parfaites.

Parce que le cercle était la forme euclidienne la plus parfaite , Ptolémée pensait que les planètes se déplaçaient sur des cercles dont les centres étaient eux même en rotation sur des sphères célestes centrés sur la terre . Cette représentation erronée du monde perdura pendant plus de 20 siècles avec les modes de pensé afférents. Pour décrire la complexité du monde, il fallait inventer un nouveau langage, celui de l'irrégulier. Puisque les habituels concept euclidiens de longueur, de largeur et d'épaisseur donnaient des réponses qui faisaient fi du bon sens, il fallait les abandonner. Mandelbrot envisageant une autre notion pour décrire l'irrégulier, celle de « dimension ».

La régularité dans l'irrégularité

Le concept de la « dimension » n'est pas nouveau. Il existe aussi dans la géométrie d 'Euclide(III è sièclae av J-Ch) Mandelbrot repris l'idée du mathématicien Felix Hausdorf(1919) , de dimensions fractionnaires , c'est à dire représentées non par des nombres entiers, mais des fractions. Une dimension fractionnaire permet de mesurer la rugosité et l'irrégularité d'un objet ou d'une pensée. La longueur de la côte bretonne tortueuse n'est pas, nous l'avons vu, très bien définie. Par contre , sa sinuosité, son degré d'irrégularité peuvent fort bien se mesurer par une dimension fractionnaire .
La dimension de la côte bretonne doit être plus grande que 1, puisqu'elle ne suit pas une courbe régulière. D'autre part elle doit être inférieure à 2, puisqu'elle ne s'étale pas pour occuper une surface toute entière à l'image de la pensé. Elle est située entre 1 et 2 , étant d'autant plus proche de 1que la côte est lisse et offre peu d'irrégularité' et d'autant plus près de 2 qu'elle est accidentée et décrit plus de Zigzags pour occuper plus de surface.
Mandelbrot a qualifié de « fractals » ces objets à la forme irrégulière, du mot latin *fractus* = cassé et rappelle le mot « fraction ».
Les objets fractals ont une propriété particulière **: leur manque de régularité n'est pas aléatoire. Il y a de la régularité dans leur irrégularité.**
Le degré d'irrégularité reste constant à différentes échelles. Un objet fractal présente la même apparence, qu'on le regarde de loin ou de près . Quand on l'approche, les menus détails se précisent, mais l'objet présente autant d'irrégularités que quand il est vu tout entier de loin voilà la singularité de notre pensée ! Le objets fractals ont ce que l'on appelle une « invariance d'échelle » : ils présentent le même aspect, quel que soit leur grossissement. Un même motif se répète à l'intérieur d'un même motif plus grand, lui-même inclus dans un motif semblable encore plus grand, à l'instar d'une série sans fin de poupées russes emboitées les unes dans les autres , la même irrégularité se répète à toutes les échelles .

La nature est faite de structures fractales :

Les structures fractales se retrouvent dans le corps humain. La structure en ramification des vaisseaux sanguins , de l'aorte aux capillaires, est de nature fractale. Les grosses artères se ramifient en artères moyennes qui se ramifient à leur tour artérioles. C'est la solution la plus efficace que la nature ait trouvé pour emmagasiner l'énorme surface des vaisseaux sanguins à l'intérieur du volume très limité du corps humain. La nature a bien réussi son tour de magie dimensionnel. Bien que le système sanguin n'occupe qu'environ 5 % du volume du corps humain, sa structure fractale fait que, dans la plupart des tissus , aucune cellule n'est jamais très éloignée d'un vaisseau.
Le réseau sanguin n'est pas le seul, dans le corps humain, à posséder une structure fractale. D'autres parties du corps en sont dotées, toujours dans le but d'empaqueter la plus grande surface dans le plus petit volume. La surface du poumon d'un être humain est supérieure à celle d'un cours de tennis ! celle de l'intestin à un petit terrain de foot-ball ! Pourtant , toute cette surface tient miraculeusement à l'intérieur de la cage thoracique respectivement du ventre. Le système urinaire , le canal biliaire dans le foie, les fibres qui transmettent les impulsions électriques au muscle cardiaque, tous se révèlent avoir une organisation fractale : des structures qui se ramifient en sous-structures qui se ramifient encore, et un même motif qui se répète d'une échelle à l'autre. Ainsi, les ramifications des branches d'un arbre, les dessins délicats d'une feuille ou encore les motifs complexes d'une écorce sont autant de structures fractales.

On peut facilement comprendre que notre cerveau soit une structure fractale non seulement dans sa forme mais aussi dans sa fonction !
Ces formes ne constitue pas seulement le langage de la nature. Elles servent aussi de support conceptuel nécessaire et indispensable à l'étude du chaos .
En effet , les attracteurs étranges associés aux systèmes chaotiques …(les figures géométriques dans l'espace abstrait des phases vers lesquelles les mouvements d'un système quel qu'il soit sont irrésistiblement attirés) .. montrent aussi cette répétition d'un même motif à toutes les échelles, c'est à dire une structure fractale.
Les objets fractals et le chaos sont intimement et indiscutablement liés.

Bibliographie / Le Chaos et l'harmonie : la fabriquation du réel de Thrin Xuan Thuan
Texte écrit pendant un jeûne dans la drôme provençale dans la semaine du 12 au 19 septembre 2014 à Villeperdrix
Dr Désiré Ohlmann